Signale und Systeme
Eine kleine Einführung

Andreas Beschorner

September 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in Signale

Signale sind Abbildungen von reellen ($\mathbb{R}$) oder komplexe ($\mathbb{C}$) Räumen in wiederum reelle oder komplexe Räume. Da solche Signale auf Mengen definiert sind, die nicht abzählbar sind (d.h. es liegen nicht ganze ($\mathbb{N}$) oder rationale ($\mathbb{Z}$) Zahlen, sonderen eben irrationale oder komplexe zugrunde, die in ihrer Menge umfassender sind), sagt man auch **(zeit)kontinuierliche Signale**. Liegt der Definitionsbereich in den ganzen Zahlen, spricht man auch von **(zeit)diskreten Signalen**. Wir wollen den Definitionsbereich, wenn er aus dem Zusammenhang klar wird oder nicht von Wichtigkeit ist, allgemein mit D angeben.

Beispiel 1. $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(t) = A \sin(2\pi f t)$, mit A, f fest
Dies ist eine typische Sinusschwingung mit Amplitude A und Frequenz f.

Ein Signal $x : D \to \mathbb{C}$ heißt **periodisch** gdw. ein $T \in \mathbb{Z}$ existiert so dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $x(n+T) = x(n)$. T heißt in diesem Falle die **Periode**. In der Praxis werden reelle Signale diskretisiert (abgetastet). Die Rate dieser Diskretisierung nennt man **Samplingrate**. Für eine Abtatsrate t bedeutet das: $x_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wird zu $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit $x(n) := x_\alpha(tn)$
Es stellt sich die Frage, was für Signale sich praktisch bearbeiten lassen, wie sie geschaffen sein müssen und wie die mathematischen Strukturen dazu aussehen. Oben schon erwähnt wurden sogenannte **Räume**, hier genauer **Vektorräume**. Sie bilden die Grundstrukturen für Signale. Vereinfacht gesagt bietet ein Raum die Möglichkeit, seine Objekte (Vektoren) zu addieren und zu vervielfachen, bietet also Addition und Skalarmultiplikation:

Für zwei Signale $x, y : D \to \mathbb{C}$ definieren wir
1) $(x+y)(n) = x(n) + y(n)$ für alle $n \in D$
2) $(\lambda x)(n) = \lambda x(n)$ für alle $n \in D$, $\lambda \in \mathbb{C}$
Dann ist $\mathbb{C}^D := \{f | f : D \to \mathbb{C}\}$, die Menge aller diese Bedingung erfüllenden Funktionen von D nach $\mathbb{C}$ ein Vektorraum.

Betrachten wir als Beispiel die Addition zweier Signale $x(t) = Ae^{i\omega t}$, $y(t) = Be^{i\omega t}$ ($A, B \in \mathbb{R}$). Sind $A, B > 0$ so findet eine Signalverstärkung statt. Für $A < 0$ und $B > 0$ wird ein Signal abgeschwächt und $A = -B$ führt zur Auslöschung. Im Falle $y(t) = Be^{i(\omega+\varepsilon)t}$ erhalten wir bei Addition $(x+y)(t) = (A + Be^{i\varepsilon t})e^{i\omega t}$, das sogenannte Amplitudenvibrato.

Was aber ist, wenn man z.B. Signale vergleichen will, wie kann so etwas vollzogen werden? Orientiert man sich am alltäglichen Leben, so werden Vergleiche anhand von Ausmaßen und Größen gezogen - in der Mathematik realisiert durch Beträge. Auch Signale haben eine solche Größe, sie wird Energie genannt.

Aus physikalischer und praktischer Sicht ist es sinnvoll, wenn diese Energie endlich ist: $\sum_{t\in\mathbb{Z}} |x(t)|^2 < \infty$.

Die Motivation für das Quadrieren liegt zum einen darin, den Eigenschaften des Signales eine Gewichtung zukommen zu lassen: Große Werte gehen Verhälhtnismäßig stark ein, kleine werden weniger gewichtet. Weiterhin folgt sie aus der zugrundeliegenden Norm und der sogennten Hilbertraumstruktur, die mathematische Vorteile (ON-Basis etc.) bietet, hier aber nicht behandelt werden soll.

2 Systeme

Die bisherigen Ergebnisse sind Grundlage, um wirklich mit Signalen arbeiten zu können. Dabei muss man unterscheiden zwischen Eingangs- und Ausgangssignal, welchen mathematisch zwei (i.A. verschiedene) Räume zugrundeliegen. Abbildungen zwischen diesen werden **Systeme** genannt. Sie sind die eigentlichen Operationen auf den Signalen, also z.B. Hochpassfilter, Verzerrer, etc.
Systeme sind nichts anderes als Funktionen, man sollte sich aber klarmachen, dass sie nicht auf Variablen arbeiten, sondern auf Signalen - also wiederum auf Funktionen. Um in der Notation keine Verwirrung zu stiften, wollen wir daher eckige Klammern benutzen. Für Signalräume E und A schreibt man für ein System T und ein Signal x demnach $T : E \to A$, $T[x] = \ldots$.
Signale und Systeme sind i.A. sehr schwer oder fast gar nicht zu überschauen und zu kontrollieren. In der Praxis arbeitet man mit Näherungen, indem man annimmt, dass Systeme die Eigenschaft der Linearität besitzen, was nichts anderes bedeutet, als dass es egal ist, ob ich Signale erste addiere (oder mit einem Skalar multipliziere) und dann das System auf sie anwende, oder andersherum: $T[\lambda x + \kappa y] = \lambda T[x] + \kappa T[y]$ mit $\lambda, \kappa \in \mathbb{C}$

Betrachten wir einige Beispiele:
a) *Zeitshift* um

$$k \in \mathbb{Z}: \ \tau_k[x](n) := x(n-k)$$

b) *Downsampling* (um M):

$$(\downarrow M)[x](n) := x(M \cdot n)$$

c) *Upsampling* (um M):

$$(\uparrow M)[x](n) := \begin{cases} x(\frac{n}{M}) & : \ M|n \\ 0 & : \ sonst \end{cases}$$

Das z.B. der Zeitshift ein Lineares System ist, kann man leicht zeigen:

$$\begin{aligned}\tau_k[\lambda x + \kappa y](n) &= [\lambda x + \kappa y](n-k) \\ &\overset{Raumstruktur}{=} \lambda x(n-k) + \kappa y(n-k) \\ &= \lambda \tau_k[x] - \kappa \tau_k[y] \qquad \square\end{aligned}$$

Lineare Systeme sind stets stetig, d.h. sie überführen konvergente Signale in konvergente Signale. Am leichtesten analysierbar sind solche Systeme, die **zeitinvariant** sind, d.h. $T \circ \tau_k = \tau_k \circ T$. Der Zeitshift zum Beispiel ist zeitinvariant, denn $\tau_k \circ \tau_l = \tau_l \circ \tau_k = \tau_{(k+l)}$, und auch Up- und Downsampling sind zeitinvariant. Abkürzend nennt man solche Systeme LTI-Systeme (Linear Time Invariant Systems). Das Downsampling ist zwar linear, nicht jedoch zeitinvariant, denn

$$((\downarrow M) \circ \tau_k)[x](n) = x(nM - k) \neq x(n(M-k)) = (\tau_k \circ (\downarrow M))[x](n)$$

2.1 Exkurs: Faltung

LTI-Systeme haben den Vorteil, dass sie sich auf eine besonders angenehme Art darstellen lassen: als sogenannte Faltung. Bildlich kann man sich eine Faltung vorstellen als ein Fenster (eine Funktion), dass über eine andere Funktion geschoben wird und in diesem Areal ein durch sie selbst gewichtetes Mittel berechnet. Da die Faltung grundlegend für Signalverarbeitung ist - z.B. für fast alle Filter etc. - wollen wir sie kurz genauer beschreiben.

Definition 2. Seien $x, y : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ gegeben. Dann ist die **Faltung** an der Stelle $n \in \mathbb{Z}$ definiert als

$$(x * y)(n) := \sum_{k \in D} x(k) y(n-k)$$

Bevor wir tiefer Einsteigen soll noch kurz der Einheitsimpuls (auch Kronecker-Symbol genannt) definiert werden, der nur an der Stelle k den Wert 1 hat, sonst verschwindet:

$$\delta^k := \begin{cases} 1 & : \quad k = 0 \\ 0 & : \quad sonst \end{cases}$$

Diese sehr einfache Funktion hat erstaunliches Potential: Wir behaupten, dass ein Signal gefaltet mit ihr dem System des Zeitshiftes entspricht, also $\tau_k[x] = x * \delta^k$.

Beweis: Wir wissen, dass $\tau_k[x](n) = x(n-k)$ per Definition des Zeitshiftes. Schauen wir uns einmal die Faltung an:

$$\begin{aligned}
(x * \delta^k)(n) &\overset{Faltung}{=} \sum_{l \in D} x(l)\delta^k(n-l) \\
&\overset{Kronecker}{=} \sum x(l)\delta_{k=n-l} \\
&= \sum (x(l)\delta_{l=n-k} \\
&= 0 + \cdots + 0 + x(n-k) + 0 + \cdots + 0 \\
&= x(n-k) \qquad \square
\end{aligned} \tag{1}$$

Und die Behauptung ist bewiesen!

Allgemein ist für beliebige LTI-Systeme T die sogenannte **Impulsantwort** definiert durch $h := T[\delta]$ so dass gilt $T[x] = h * x$, d.h. T ist der zur Impulsantwort h gehörende Faltungsoperator für alle Signale $x \in E$. Auch das soll noch schnell bewiesen werden:

$\forall x \in E$ und $\forall n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned}
T[x](n) &= T[\sum_k x(k)\delta^k](n) \\
&\overset{lin.\&stetig}{=} \sum_k x(k)T[\delta^k](n) \\
&\overset{LTI}{=} \sum_k x(k)T[\delta]^k(n) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_k x(k)h(n-k) \\
&= (h * x)(n) \qquad \square
\end{aligned} \tag{2}$$

Ist ein LTI-System beschränkt, d.h. $\forall k \in \mathbb{Z} : \exists b \in R : |T[\delta^k]| < b$, dann heißt T **Filter** (Anmerkung: In der Technik heißt es *das* Filter!). Wie wir gerade gesehen haben, kann man Filter durch ihre Wirkung auf Impulse beschreiben.

3 The big deal: Die Fourierstransformation

Bei der Fouriertransformation (FT) handelt es sich im Grunde um eine Zerlegung eines Eingangssignales in seine Einzelfrequenzen. In der Mathematik/ Phsyik gibt es vielerlei Zerlegungen mit jeweils verschiedenen Vor- und Nachteilen. Während die FT zwar Auskunft über die das Signal bildenden Frequenzen gibt, beinhaltet sie keinerlei Zeitinformation. Aufgrund dieses Lokalisationsdefizites wurden die gefensterte FT und die sogenannte Wavelet-Transformation eingeführt, die diesem Mangel abhelfen. Wir wollen uns hier jedoch auf die einfache FT beschränken.

Schauen wir uns die Frequenzfolge $f_\omega := (e^{i\omega n})_{n\in\mathbb{Z}}$ an. Wie operiert ein LTI-System auf dieser? Nach den Ergebnissen aus Kapitel zwei können wir das durch Faltung mit der Impulsantwort herausfinden. Sei also $T \in E$ ein System mit Impulsantwort $h = T[\delta]$, d.h. $T[x] = h * x$. Mit $z := e^{i\omega}$ folgt

$$\begin{aligned} T[f_\omega](n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k) f_\omega(n-k) \\ &= z^n \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k) z^{-k} =: H(z) \end{aligned} \tag{3}$$

$T[f_\omega] = H(e^{i\omega}) f_\omega$ ist also ein vielfaches von f_ω. Ist nicht speziell eine Impulsantwort, sondern generell eine Funktion $x(n)$ Gegenstand der Untersuchung, so nennt man allgemein $X(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) z^{-n}$ die z-Transformierte zu x. Sie besitzt, neben der Linearität, weitere wichtige Eigenschaften, von denen eine nun herausgearbeitet wird, die für heutige Signalverarbeitung mit dem Computer von immenser Wichtigkeit ist. Schauen wir uns dazu die z-Transformierte der Faltung der Impulsantwort und des Signales (also die eines Filters) an. Diese ist

$$Y(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (h * x)(n) z^{-n}$$

Nun betrachten wir das Produkt der einzelnen z-Transformierten

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k) z^{-k} \sum_{l\in\mathbb{Z}} x(l) z^{-l} &= \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} h(k) x(l) z - k + l \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\sum_{k+l=n} h(k) x(l) z^{-n} \big) \\ &\overset{l=n-k}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k) x(n-k) \big) z^{-n} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (h * x)(n) z^{-n} = Y(n) \end{aligned} \tag{4}$$

und sehen, dass dieses $Y(n)$ entspricht. Durch z-Transformation werden also Faltungen in punktweise Multiplikation überführt. Der große Vorteil liegt nun im Rechenaufwand! Betrachtet man die Faltung, so erkennt man, dass allein für die Berechnung selbiger an einer Stelle n ein intensiver Aufwand nötig ist, nämlich eine Mittlung über den gesamten Definitionsbereich! Das erfolgt dann für jede einzelne Stelle, und eben diese Mittellung entfällt. Ist die z-Transformierte zu x: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ auf dem Einheitskreis definiert, dann heißt $x\hat{(\omega)} := X(e^{-i\omega})$ die **Fouriertransformierte (FT)** der Folge x.

Nicht alle Signale besitzen überhaupt eine FT, wohl aber beschränkte und solche, wie sie in der Praxis im Computer vorkommen (da in diesem Falle selbige endlich und somit beschränkt sind). Aufgrund der besonderen Eigenschaften der Hilberträume läßt sich jedes Signal aus selbigen durch z-Transformation spektralzerlegen. Konkret heißt das, dass der Raum (wie jeder Raum) durch eine Basis gegeben ist, und das Funktionen grob gesprochen als Linearkombination von Basiselementen angesehen werden kann, d.h. als Summe solcher. In unserem Fall ist besteht diese Basis entweder im komplexen aus

$$\{e^{2\pi ikt} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

oder im reellen aus den Elementen

$$\{1, \sqrt{(2)}\cos(2\pi kt), \sqrt{2}\sin(2\pi kt) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

und das Signal zerfällt dementsprechend im rellen in

$$x(t) = a_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kt) + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi kt).$$

Die Koeffizienten der Linearkombiation drücken aus, mit welcher Intensität die Basisfunktionen der jeweiligen Stellen im zeitabhängigen Signal $x(t)$ enthalten sind. Die FT ist, wie man sehen kann, quasi eine Art Frequenzmittelwert über die gesamte Zeitachse, respektive das gesamte Zeitfenster, welches sie umspannt. Die Koeffizienten berechnen sich nach dem Satz von Parsefal aus dem Skalarprodukt des Signales mit den jeweiligen Basiselementen. Beispielweise ist

$$a_{k>0} =< x, \sqrt{2}\cos(2\pi kt) > \quad = \int_0^1 x(t) cos(2\pi kt) dt$$

Eine Funktion kann also angesehen werden als eine Überlagerung ganzzahliger Frequenzvielfacher. In der Praxis sind Signale natürlich nicht im Intervall [0, 1]-periodisch. Nimmt man aber an, dass, wie bei endlichen Signalen üblich,

4 Aussichten

Die erläuterte FT gilt derart eigentlich nur für periodische (1-periodische oder 2π-periodische) Funktionen. In der Praxis wird ein sogenanntes Dichtheitsargument benutzt, um endliche Signale zu verarbeiten. Dazu muss unter anderem die Funktion außerhalb des Definitionsbereiches durch Null fortgesetzt werden, was bei der FT zu Störfrequenzen führt.

Ansonsten sollte diese Ausarbeitung eine kleine Einleitung in die Mathematik von Signalen und Systemen geben. Die Defizite der FT erst durch **gefensterte FT**, später vor allem auch durch sogenannte **Wavelets** ausgeglichen. Letztere sind z.B. Hauptbestandteil der MP3-Kodierung, finden aber auch z.B. in der Bildkompression, der Bewegungsanalyse oder in der Deutung medizinischer Spintomographien Anwendung. Ein Hauptaugenmerk liegt in der Praxis vor allem in der Effizient bezüglich Speicher- und Rechenaufwand: Für die FT zum Beispiel bietet im diskreten Fall die *Fast Fourier Transform* eine Möglichkeit zur schnellen Berechnung.

A Symbolverzeichnis

Symbol	Beschreibung
$\circ$	Konkatenation, d.h. Hintereinanderausführung von Funktionen. Dabei wird von rechts nach links vorgegangen!
$\exists$	"Es existiert ein..." Genau genommen bedeutet es, dass mindestens ein Objekt existiert.
$\exists!$	"Es existiert genau ein..."
$\forall$	"Für alle..."
$\rightarrow$	Ist das Zeichen für eine Abbildung von einer Menge (dem Pfeil vorausgehendes Symbol) in eine andere (dem Pfeil nachstehendes Symbol)
$\mapsto$	Gibt die Abbildungsvorschrift für ein konkretes Elemente aus dem Definitionsbereich an.
$\square$	q.e.d. - Das Ende eines Beweises.
$:=$	Definition einer Abbildung.
$a \vert b$	a teilt b, d.h. b ist ohne Rest durch a teilbar.
$\{...\vert ...\}$	Innerhalb von Mengen bedeutet der Strich auch "für welche gilt".
$e^{i\omega n}$	e ist die Euler'sche Zahl und i die imaginäre Einheit. ω und n sind dem jeweiligen Kontext zu entnehmen.
$(e^{i\omega n})_{n\in\mathbb{Z}}$	Die runden Klammern geben an, dass es sich um eine Folge von Zahlen handelt, hier mit Folgenindex aus $\mathbb{Z}$
λ, κ	Lambda und Kappa repräsentieren Skalare, keine Vektoren. In (Vektor)räumen sind dies hier Elemente aus dem zugrundeliegenden Basisraum, also z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{C}$.
$< x, y >$	Bezeichnet ein Skalarprodukt von x und y.
$\mathbb{N}$	Bereich der natürlichen (negativen und positiven) Zahlen inklusive Null.
$\mathbb{Z}$	Bereich der positiven Zahlen ohne Null.
$\mathbb{Q}$	Bereich der rationalen Zahlen.
$\mathbb{R}$	Bereich der irrationalen Zahlen.
$\mathbb{C}$	Bereich der komplexen Zahlen.

B Literatur

Blatter, Christian: *Wavelets - Eine Einfhrung*; 2. Auflage; Friedr, Vieweg & Sohn, Braunschweig/ Wiesbaden 2003

Clausen, Michael und Müller, Meinhard: *Zeit-Frequenz-Analyse und Wavelettransformationen. Skript zur Audiosignalverarbeitung WS2000/2001 und SS2001*; 2. Auflage; Bonn, März 2001

Elstrodt, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie*; 3. Auflage; Springer, Berlin 2002